SVEUČILIŠTE U SPLITU
POMORSKI FAKULTET

LUKA ĆERLUKA

ZEMLJOPISNE I PRAVOKUTNE KOORDINATE

ZAVRŠNI RAD

SPLIT, 2017.

SVEUČILIŠTE U SPLITU
POMORSKI FAKULTET

POMORSKA NAUTIKA

ZEMLJOPISNE I PRAVOKUTNE KOORDINATE

ZAVRŠNI RAD

MENTOR:
Izv.prof.dr.sc. Zvonimir Lušić

STUDENT:
Luka Ćerluka (MB: 0171267716)

SPLIT, 2017.

SAŽETAK

Navigacija i određivanje položaja broda u plovidbi oduvijek su predstavljali izazov u pomorstvu. Definiranje koordinatnog sustava uvelike je doprinijelo snalaženju u prostoru. U ovom radu opisan je način određivanja točke u prostoru, odnosno obrađen je pravokutni i zemljopisni koordinatni sustav. Pravokutni koordinatni sustav opisan je kao sustav pomoću kojeg se određuje položaj neke točke u prostoru, a zemljopisni koordinatni sustav kao sustav pomoću kojeg je definiran položaj neke točke na površini Zemlje. Da bismo što bolje razumjeli zemljopisni koordinatni sustav, potrebno je poznavati oblik i veličinu Zemlje. Zemlja je oblika Geoida, ali se zbog lakšeg matematičkog poimanja najčešće predstavlja kao kugla ili elipsoid te su oblici Zemlje kao kugle i kao elipsoida opisani u radu. Također, u radu su opisani i koordinatni sustavi koji se koriste u astronomskoj navigaciji.

Ključne riječi: *pravokutni koordinatni sustav, zemljopisni koordinatni sustav, Zemlja, elipsoid, kugla*

ABSTRACT

Navigation and determinating the position of the ship has always been a challenge during the voyage of ship. Defining a coordinate system has contributed to orientation a lot. In this paper the method of determining the position of point in space and also rectangular and geographic coordinate system have been described. Rectangular coordinate system is described as a system which is used to determine the position of some point in space and geographic coordinate system as a system which is used to determine the position of some point on the Earth's surface. In order to understand geographic coordinate system, it's important to be familiar with the shape and size of the Earth. The Earth has a form of Geoid, but because of an easier mathematical notion, it is often represented as a sphere or an ellipsoid and the definitions of Earth as a sphere or ellipsoid are described in the paper. Also, in this paper there is description of coordinte systems which are used in astronomical navigation.

Key words: *rectangular coordinate system, geographic coordinate system, Earth, ellipsoid, sphere*

Sadržaj

1. UVOD

Tijekom gotovo cijele svoje povijesti čovjek nastoji proučiti prostor u kojem živi. Oduvijek ga zanima oblik i veličina Zemlje te njegov položaj na Zemlji. Otkrivanje novih područja često se odvijalo plovidbom. U vrijeme prvih ljudskih plovidbenih pothvata, ljudska plovidba brodom se temeljila na priobalnoj plovidbi. Ljudi su plovili uz kopno i orijentirali se pomoću objekata na kopnu. Plovili su na kratkim relacijama te je plovidbena ruta podrazumijevala putovanje sigurno od nepovoljnih hidrometeoroloških prilika. Razvojem znanosti i matematike čovjek počinje definirati razne znanstvene discipline koje će mu pomoći pri orijentaciji u prostoru. U ovom radu istaknute su zemljopisne i pravokutne koordinate u svrhu korištenja koordinatnog sustava za određivanje položaja točke na Zemlji. Cilj ovog rada je prikazati važnost zemljopisnih koordinata i istaknuti prednosti koje su se pojavile upotrebom koordinatnog sustava za snalaženje u prostoru u pomorskoj navigaciji.

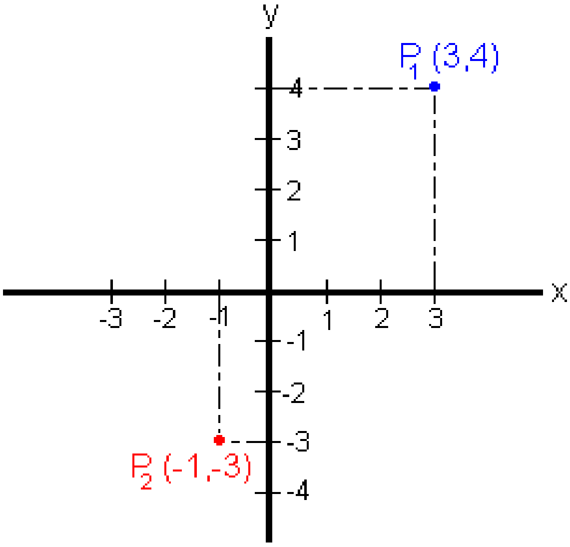
Rad se sastoji od 6 poglavlja kojima je cilj objasniti opisivanje položaja neke točke u prostoru i na Zemlji, odnosno objasniti zemljopisne i pravokutne koordinate. Nakon Uvoda u 2. poglavlju definiran je koordinatni sustav te su objašnjene neke od glavnih vrsta koordinatnog sustava. Definirane su koordinate tih koordinatnih sustava koje se pridružuju nekoj točki u sustavu kako bi opisale položaj te točke. Kako bi se u 4. poglavlju mogle definirati zemljopisne koordinate bilo je potrebno prethodno u 3. poglavlju opisati oblik i veličinu Zemlje. Zemlja je nepravilnog oblika, oblika Geoida, ali se za definiranje zemljopisnih koordinata i za ostale proračune Zemlje koristi Zemlja kao kugla ili Zemlja kao elipsoid. U 5. poglavlju opisan je još jedan primjer upotrebe koordinatnih sustava, a to je upotreba u astronomskoj navigaciji. Objašnjena su 4 koordinatna sustava u astronomskoj navigaciji te njihove glavne osi i koordinate. Na kraju rada se nalazi zaključak.

2. KOORDINATNI SUSTAV

Koordinatni sustavi su sustavi koji omogućuju da se točke na krivulji, pravcu, plohi, u ravnini ili prostoru opišu s pomoću brojeva, odnosno koordinata. Određivanje položaja nekog objekta u prostoru bilo je poznato još od staroegipatskih graditelja i babilonskih astronoma. Početak intezivnog razvoja koordinatnih sustava dogodio se u 17. stoljeću kada je Rene Descartes definirao pravokutni ili Kartezijev koordinatni sustav koji je prema njemu dobio i ime (lat. *Renatus Cartesius*, u prijevodu Rene Descartes). Kartezijev koordinatni sustav temelj je razvoja i uspjeha moderne linearne algebre, a zatim i mnogih njezinih nadogradnja (algebarske geometrije, funkcionalne analize, diferencijalne geometrije, itd.) [7].

2.1. KOORDINATNI SUSTAV U RAVNINI

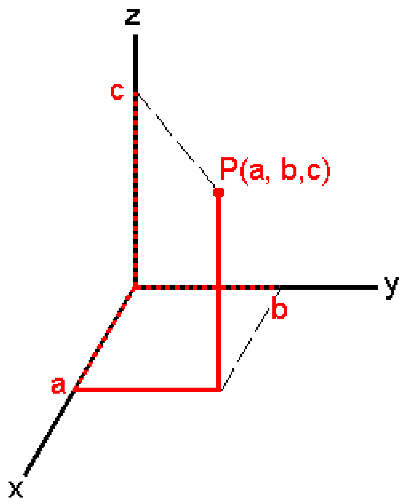
Kartezijev koordinatni sustav u ravnini definiran je s dva međusobno okomita pravca x i y. Ishodište tog koordinatnog sustava nalazi se na sjecištu tih dvaju pravaca [7]. Nekoj točki P ravnine pridružuju se dvije koordinate, apscisa i ordinata. Apscisa točke P prikazuje koliko je pravac koji prolazi točkom P, a okomit je na pravac x, udaljen od ishodišta. Ordinata točke P prikazuje koliko je pravac koji prolazi točkom P, a okomit je na pravac y, udaljen od ishodišta. Položaj točke P u koordinatnom sustavu u ravnini prikazuje se kao uređen par realnih brojeva P (x, y). Slika 1. prikazuje kartezijev koordinatni sustav s prethodno navedenim elementima [7].



Slika 1. Kartezijev koordinatni sustav [9]

2.2. KOORDINATNI SUSTAV U PROSTORU

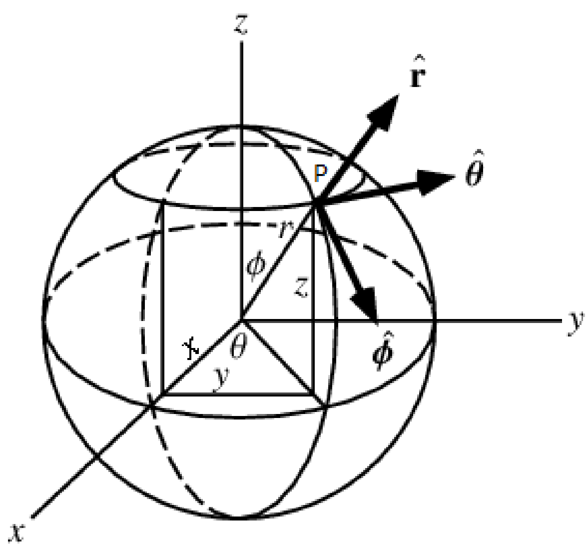
Pravokutni koordinatni sustav u prostoru određen je trima pravcima koji su međusobno okomiti. Ti pravci označavaju se sa x, y i z te se još nazivaju i osima koordinatnog sustava. Ishodište tog koordinatnog sustava nalazi se u sjecištu tih triju pravaca [7]. U koordinatnom sustavu u prostoru nekoj točki se pridružuju tri koordinate: apscisa (os x), ordinata (os y) i aplikata (os z). Apscisa neke točke u pravokutnom koordinatnom sustavu u prostoru prikazuje koliko je pravac koji prolazi tom točkom i okomit je na os x udaljen od ishodišta tog koordinatnog sustava. Ordinata neke točke u tom koordinatnom sustavu prikazuje koliko je pravac koji prolazi tom točkom i okomit je na os y udaljen od ishodišta tog koordinatnog sustava. Aplikata neke točke u tom koordinatnom sustavu prikazuje koliko je pravac koji prolazi tom točkom i okomit je na os z udaljen od ishodišta tog koordinatnog sustava. Koordinate neke točke koordinatnog sustava u prostoru prikazuju se kao uređen pa realnih brojeva (x, y, z). Navedeni elementi koordinatnog sustava mogu se vidjeti na slici 2.



Slika 2. Pravokutni koordinatni sustav u prostoru [10]

2.3. SFERNI KOORDINATNI SUSTAV

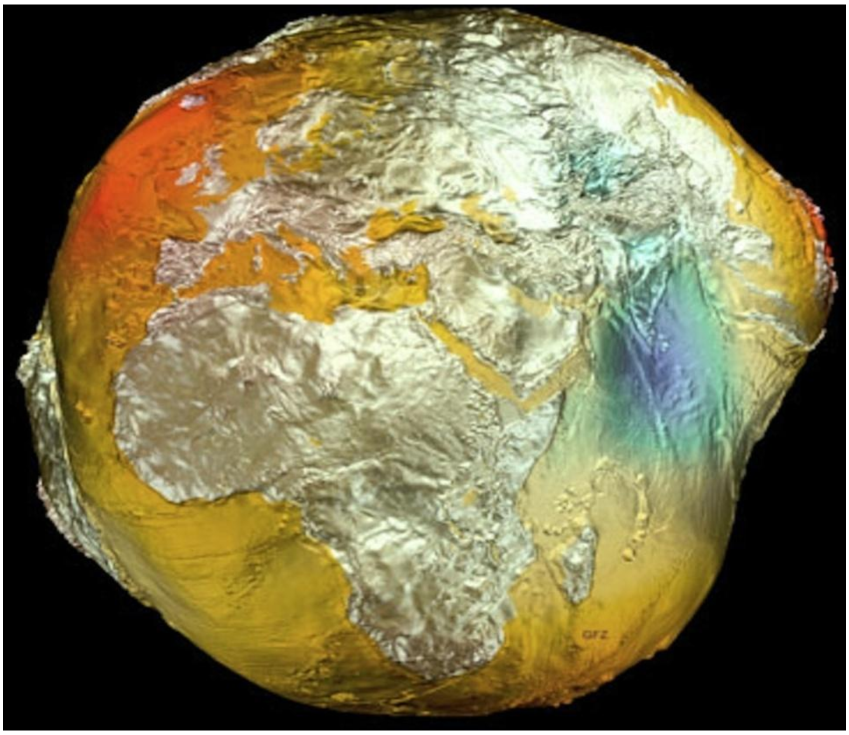
Sferni koordinatni sustav određen je međusobno okomitim polupravcima y i z. Ishodište sustava se nalazi u točki ϴ. Neka točka P koja se nalazi u sfernom koordinatnom sustavu, definirana je koordinatama (r, φ, θ). Koordinata r označava udaljenost od ishodišta do točke P, koordinata φ je kut od projekcije vektora OP na ravninu okomitu na polupravac z i koordinatu θ, a koordinata θ označava kut koji vektor OP zatvara s polupravcem z [7]. Sferni koordinatni sustav vizualno je prikazan na slici 3.



Slika 3. Sferni koordinatni sustav [12]

3. OBLIK I VELIČINA ZEMLJE

Iako su prva razmišljanja o obliku Zemlje bila da je Zemlja ravna ploča, Zemlja je u 4. stoljeću prije nove ere definirana kao kugla. *Tek u XVII st. radovima Newtona (Njutna) i stupanjskim mjerenjem Zemljinih meridijana u XVIII st., Zemljin oblik se, u drugoj aproksimaciji, definira i određuje oblikom rotacijskog elipsoida ili sferoida* [1]. Kasnije se još dosta svjetskih znanstvenika bavilo veličinom zemljinog elipsoida kao što su Hayford, Delambre, Clarke, Ruđer Bošković. Hayfordov elipsoid uvršten je kao međunarodni, a 1967. godine je usvojen geodetski referentni sustav za proračune u geodeziji i kartografiji. Primjenom umjetnih Zemljinih satelita utvrđeno je da definirani oblik Zemlje nije točan, stoga se najtočniji oblik Zemlje opisao kao Geoid. Geoid se ne može točno matematički predstaviti. *Geoid predstavlja osnovnu (razinsku) površinu, koja je u svakoj točki okomita na smjer sile Zemljine teže. Takva površina se približava površini oceana u mirnom stanju, a od elipsoida se razlikuje više ili manje, ovisno od položaja promatrane točke na Zemlji* [1]. Oblik Zemlje (Geoid) prikazan je na slici 4.



Slika 4. Oblik Zemlje kao Geoid [11]

3.1. ELEMENTI ZEMLJE KAO KUGLE

Kugla nastaje rotacijom kružnice oko svoje osi, a kružnica je geometrijsko mjesto točaka u ravnini jednako udaljenih od zadane čvrste točke koja se zove središte kružnice [6]. Odstupanja Zemljinog oblika od oblika kugle su zanemariva za većinu navigacijskih proračuna, stoga se za navigaciju koriste elementi Zemlje kao kugle. Os Zemlje je zamišljeni pravac koji spaja sjeverni i južni pol i oko kojeg se rotira Zemlja kao kugla [1]. Zemlja kao kugla se sastoji od velikih i malih kružnica, a grafički prikaz može se vidjeti na slici 5.

Velika kružnica – svaka kružnica na kugli kojoj ravnina prolazi kroz središte kugle [4]. *Mala kružnica – svaka kružnica na kugli kojoj ravnina ne prolazi kroz središte kugle* [4]. Ekvator ili polutnik – velika kružnica čija ravnina dijeli Zemlju na južnu i sjevernu polutku te je okomita na zemljinu os [1].

Meridijan ili podnevnik – velika kružnica koja spaja sjeverni i južni pol. Polovi dijele meridijane na dva dijela. Meridijan koji prolazi kroz Greenwich se naziva nulti ili početni meridijan [1].

Paralela ili usporednica – mala kružnica čija je ravnina paralelna sa ravninom ekvatora, a time i okomita na zemljinu os. Kreću se od ekvatora prema sjevernom i južnom polu [4]. Udaljenost paralela od ekvatora izračunava se tako da se polumjer Zemlje (r) pomnoži sa sinusom kuta u središtu između ravnine ekvatora i pravca iz središta Zemlje do točke koja se nalazi na paraleli [6].

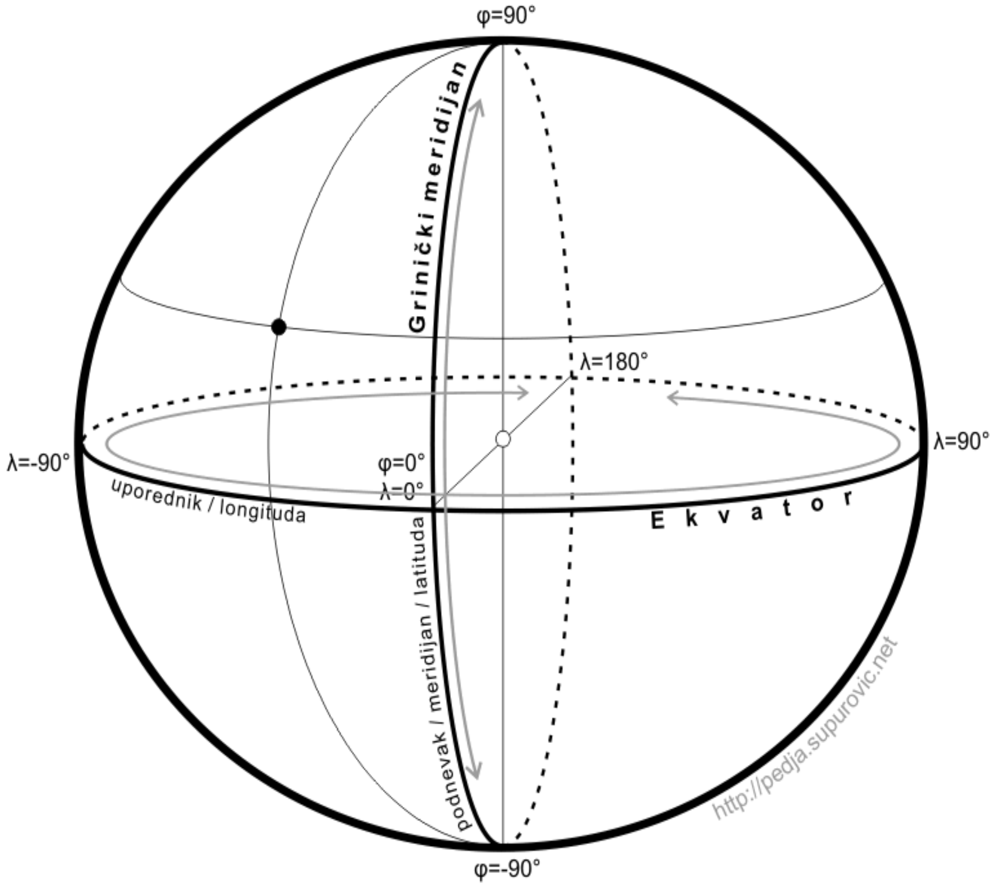
$$y = r \times \sin \varphi \tag{1}$$

Udaljenost bilo koje točke na površini Zemlje oblika kugle od središta Zemlje oblika kugle je njezin polumjer (r). Polumjer je uvijek stalan za bilo koju točku na površini Zemlje kao kugle [6].

$$r^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.29577951^\circ \qquad [6]$$

$$r' = \frac{360^\circ \times 60}{2\pi} = \frac{21600}{2\pi} = 3437.746771' \qquad [6]$$

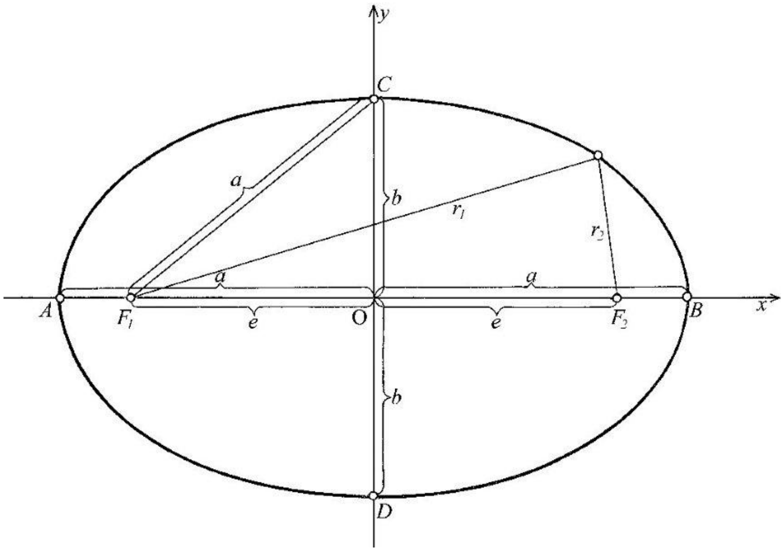
Ako se uzme u obzir da je 1' odgovara 1 nautičkoj milji tada je radijus Zemlje izražen u miljama, a u metrima radijus iznosi 6 366 707.02 m [6].



Slika 5. Elementi Zemlje kao kugle [14]

3.2. ELEMENTI ZEMLJE KAO ELIPSOIDA

Elipsa je skup točaka u ravnini za koje vrijedi da je zbroj udaljenosti (r_1 i r_2) od dvije čvrste stalan i jednak velikoj osi elipse (2a), kao što je prikazano na slici 6 [4].



Slika 6. Elipsa [7]

Linearni ekscentricitet (ε) – udaljenost žarišta F1 ili F2 od središta elipse (O) [4].

$$\varepsilon = \sqrt{(a^2 - b^2)} \tag{2}$$

Numerički ekscentricitet [4]:

$$e = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} \tag{3}$$

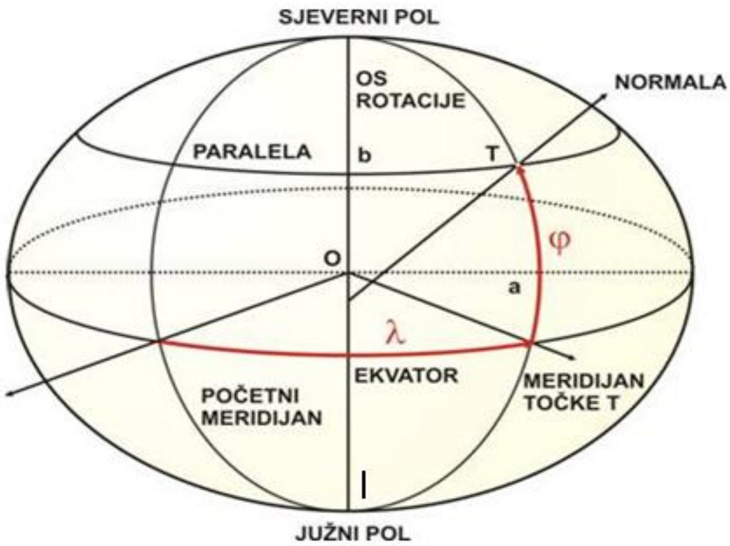
Spljoštenost [4]:

$$f = \frac{(a - b)}{a} \tag{4}$$

Rotacijom Zemlje oko male osi nastaje elipsoid. Jednadžba elipsoida je [6]:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{5}$$

Ako je a>b>c, elipsoid je troosni. Ako je a=c, elipsoid je dvoosni [6]. Za lakše razumijevanje navedenih formula i za bolju vizualizaciju, Zemlja kao elipsoid grafički je prikazana na slici broj 7.



Slika 7. Zemlja kao elipsoid [13]

Mnogi znanstvenici su se bavili i danas se bave veličinom Zemljinog elipsoida. Najpoznatiji elipsoid je Besselov elipsoid. Bessel je bio njemački znanstvenik i svoje je rezultate objavio 1841. godine. Veličine parametara Besselovog elipsoida su [6]:

a=6 377 397.155 m

b=6 356 078.963 25 m

e^2=0.006 674 372 230 614

e'^2=0.006 719 218 797 971

μ=0.003 342 773 182= 1/299.152 812 85 [6]

Hayfordov elipsoid je Međunarodna unija za geodeziju i geofiziku na zasjedanju u Madridu 1924. nazvala internacionalnim [6]. Vrijednosti Hayfordovog elipsoida su:

a=6 378 388 m

b=6 356 911.946 3 m

e^2=0.006 722 670 022 333

e'^2=0.006 768 170 197 224

μ=0.003 367 003 367 003= 1/297 [6]

WGS 84 je kartografski datum koji je danas sve rašireniji. Kartografski datum je matematički model Zemlje oblika elipsoida s definiranom točkom ishodišta koordinatnog sustava. Ovaj sustav temelj je GPS (engl. *Global positioning system*), a njegove veličine su:

a=6 378 137 m

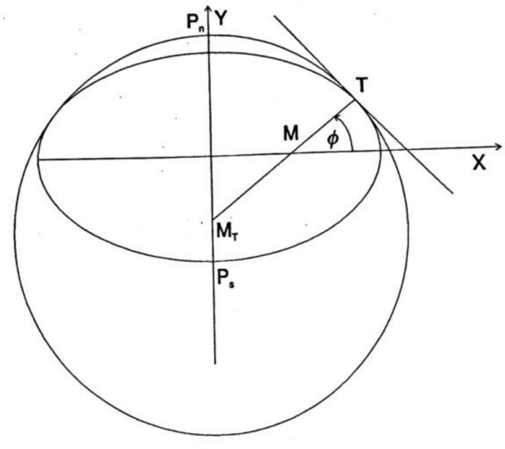
b=6 356 752, 3142 m

f=1/298,257223563 [4]

3.3. POLUMJERI ZAKRIVLJENOSTI ZEMLJINOG ELIPSOIDA

Ravnina podnevnika je ravnina koja prolazi kroz normalu i os rotacije elipsoida [6]. Ravnina prvog vertikala je ravnina koja prolazi kroz normalu okomito na ravninu podnevnika [6]. Glavni normalni presjeci su presjeci po podnevniku i prvom vertikalu, a polumjer zakrivljenosti podnevnika u nekoj točki Zemljinog elipsoida, koji je prikazan na slici 8., glasi:

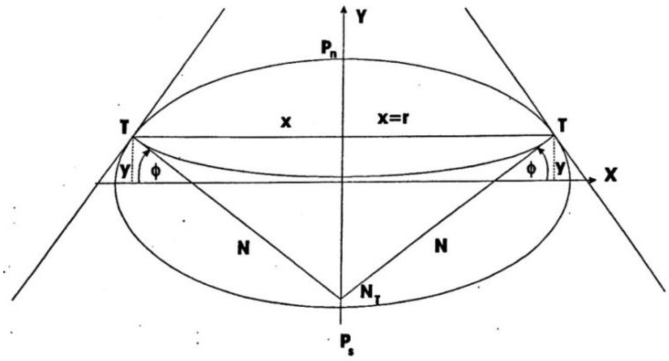
$$M = \frac{a \times (1 - e^2)}{(1 - e^2 \times sin^2\varphi)} \tag{6}$$



Slika 8. Polumjer zakrivljenosti podnevnika [6]

Jednadžba polumjera zakrivljenosti prvog vertikala Zemljinog elipsoida, koji je prikazan na slici 9., glasi [6]:

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \times sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \tag{7}$$



Slika 9. Polumjer zakrivljenosti prvog vertikala [6]

Zbog nejednake zakrivljenosti podnevnika duljina minute luka podnevnika nije ista u različitim zemljopisnim širinama, a duljina luka polutnika je ista. Nautička milja je duljina luka jedne minute podnevnika u srednjoj zemljopisnoj širini na Zemlji kao elipsoidu. Za Besselov elipsoid dužina 1 minute luka podnevnika srednje vrijednosti iznosi 1852.010328m, a dužina polumjera elipsoida promatranog kao kugla iznosi 1852.00 6433 [6].

Zemljin elipsoid je male spljoštenosti, stoga se mali dio elipsoida može aproksimirati plohom kugle polumjera jednakog drugom korijenu umnoška glavnih polumjera zakrivljenosti [6].

$$R_s = \sqrt{M \times N} \tag{8}$$

Ako se uvrsti vrijednost polumjera a i b elipsoida u jednadžbu za r dobivenu izjednačavanjem volumena kugle s volumenom elipsoida dobit će se vrijednost 1 minute Besselova elipsoida, a to je 1853.31314 m [6].

$$r = \sqrt[3]{a^2 \times b} \tag{9}$$

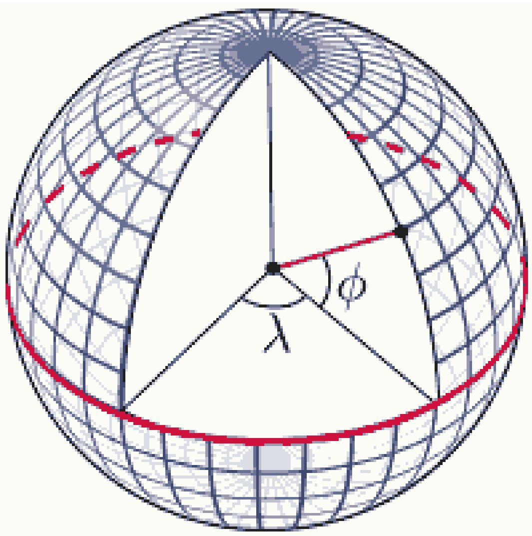
Nautička milja spada u iznimno dopuštene mjerne jedinice izvan međunarodnog sustava mjernih jedinica. Vrijednost 1 N. milje od 1852 m predložena je od strane International *Hydrographic Bureau još 1929. U Vel. Britaniji 1 N. milja iznosi 1853.18, a u SAD 1853.248 m i to zbog korištenja različitih elipsoida* [6].

4. ODREĐIVANJE POLOŽAJA TOČKE NA ZEMLJI

4.1. ZEMLJOPISNA ŠIRINA I DUŽINA

Položaj bilo koje točke na Zemljinoj površini može se definirati pomoću zemljopisnih koordinata. Zemljopisne koordinate su: zemljopisna širina, zemljopisna dužina i nadmorska visina [4].

Na slici 10. prikazano je: zemljopisna širina (φ) - kut iz središta Zemlje kao kugle između ravnine ekvatora i radijus-vektora od središta Zemlje do promatrane točke, mjeren u ravnini meridijana mjesta. Isto tako zemljopisna se širina neke točke se može opisati i kao luk meridijana mjesta od ekvatora do promatrane točke. Zemljopisna širina neke točke izražava se u stupnjevima, minutama i sekundama, tj. u kutnim mjerama. Širina može biti od 0° na ekvatoru, do 90° na južnom ili sjevernom polu [4]. Geografska dužina (λ) neke točke može se definirati kao kut u središtu Zemlje između prvog ili početnog meridijana i meridijana mjesta. Mjeri se od prvog ili početnog meridijana prema istoku ili zapadu. Izražava se u stupnjevima, minutama i sekundama od prvog ili početnog meridijana do 180° prema istoku ili zapadu, točnije do protumeridijana početnog meridijana [4].



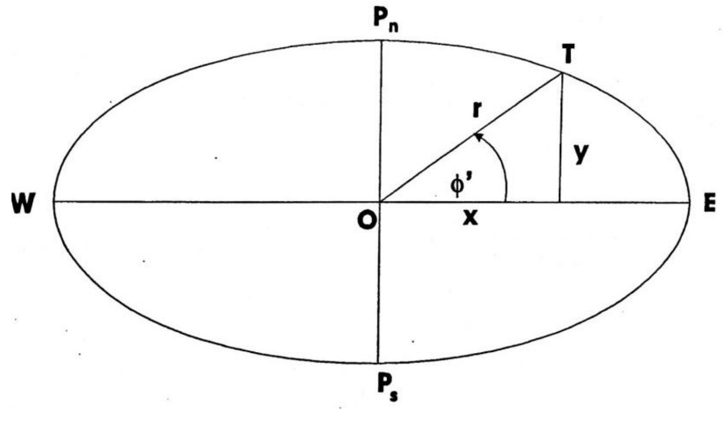
Slika 10. Zemljopisna širina i dužina [8]

Za točnije proračune Zemlje češće se koristi Zemlja kao elipsoid nego Zemlja kao kugla. Zemljopisna dužina Zemlje kao elipsoida definirana je i mjeri se kao i zemljopisna dužina Zemlje kao kugle. Kod Zemlje kao elipsoida razlikujemo dvije širine: geografska i geocentrična. Geografska širina (φ) neke točke na Zemlji kao elipsoidu je kut što ga zatvara radijus ekvatora s vertikalom te točke mjeren u ravnini meridijana mjesta.

4.2. GEOCENTRIČNA ŠIRINA

Geocentrična širina (φ') je kut između radijusa ekvatora Zemlje kao elipsoida i radijus vektora promatrane točke, mjeren u ravnini meridijana mjesta [1]. Neka se točka T nalazi na elipsi kao što je prikazano na slici 11.

x-označava ravninu ekvatora, y-linija paralelna sa malom osi elipse od ekvatora do točke T na elipsi.



Slika 11. Geocentrična širina (6)

Jednadžba elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2} = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} \tag{10}$$

Ako se jednadžbi diferencira y u odnosu na x:

$$2ydy = -\frac{b^2 2xdx}{a^2} / \div dx$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 2x}{a^2} / \div 2y \tag{11}$$

Nakon ovih operacija dobit će se koeficijent smjera tangente na elipsi, tj. jednadžba tangente u točki T elipse.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} \tag{12}$$

Tangens kuta (90º+φ) jednak je $\frac{dy}{dx}$, a on je jednak negativnom kotangensu kuta φ koji s osi x zatvara normala na tangentu.

$$\frac{dy}{dx} = -\cot\varphi \tag{13}$$

Jednadžba koeficijenta smjera tangente na elipsi se onda prikazuje kao:

$$\frac{b^2x}{a^2y} = \cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \tag{14}$$

Ako se jednadžba kvadrira dobiva se:

$$\frac{b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{cos^2\varphi}{sin^2\varphi} \tag{15}$$

Jednostavniji oblik je:

$$x^2 = \frac{a^4y^2 \times cos^2\varphi}{b^4 \times sin^2\varphi} \tag{16}$$

U jednadžbu se uvrsti vrijednost x iz početne jednadžbe te se dobiva:

$$\frac{a^2b^2 - a^2y^2}{b^2} = \frac{a^4y^2 \times cos^2\varphi}{b^4 \times sin^2\varphi}$$

$$(a^2b^2 - a^2y^2) \times b^4 \times sin^2\varphi = \ b^2a^4y^2 \times cos^2 /: b^2$$

$$(a^2b^2 - a^2y^2) \times b^2 \times sin^2\varphi = a^4y^2 \times cos^2\varphi$$

$$a^2b^4 \times sin^2\varphi - a^2y^2b^2sin^2\varphi = a^4y^2 \times cos^2\varphi$$

$$a^2b^4 \times sin^2\varphi = a^4y^2 \times cos^2\varphi + a^2y^2b^2 \times sin^2\varphi$$

$$a^2b^4 \times sin^2\varphi = a^2y^2 \times (a^2 \times cos^2\varphi + b^2 \times sin^2\varphi) \ /: a^2$$

$$b^4 \times sin^2\varphi = y^2 \times (a^2 \times cos^2\varphi + b^2 \times sin^2\varphi)$$

$$y^2 = \frac{b^4 \times sin^2\varphi}{a^2 \times cos^2\varphi + b^2 \times sin^2\varphi} \tag{17}$$

Jednadžba y^2 se uvrštava u jednadžbu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ tj. $x^2 = \frac{a^2b^2 - a^2y^2}{b^2}$

$$x^2 = \frac{a^2b^2 - a^2 \times \left(\frac{b^4 \times sin^2\varphi}{a^2 \times cos^2\varphi + b^2 \times sin^2\varphi}\right)}{b^2} =$$

$$= \frac{\frac{a^2b^2 \times (a^2 \times cos^2\varphi + b^2 \times sin^2\varphi) - a^2b^2 \times sin^2\varphi}{a^2 \times cos^2\varphi + b^2 \times sin^2\varphi}}{b^2} =$$

$$= \frac{a^4b^2 \times cos^2\varphi + a^2b^4 \times sin^2\varphi - a^2b^4 \times sin^2\varphi}{a^2 \times cos^2\varphi + b^4 \times sin^2\varphi} \times \frac{1}{b^2} =$$

$$= \frac{a^4b^2 \times cos^2\varphi}{b^2a^2 \times cos^2\varphi + b^4 \times sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{a^4b^2 \times cos^2\varphi}{b^2 \times (a^2 \times cos^2\varphi + b^2 \times sin^2\varphi)} = \frac{a^4 \times cos^2\varphi}{a^2 \times cos^2\varphi + b^2 \times sin^2\varphi}$$

$$x = \frac{a^2 \times \cos\varphi}{\sqrt{a^2 \times cos^2\varphi + b^2 \times sin^2\varphi}} \tag{18}$$

Jednadžba za y^2 može se izraziti i ovako:

$$y = \frac{b^2 \times \sin\varphi}{\sqrt{a^2 \times cos^2\varphi + b^2 \times sin^2\varphi}} \tag{19}$$

Iz jednadžbe za prvi numerički ekscentricitet, jednadžbe (3), može se dobiti $b^2 = a^2 \times (1 - e^2)$, stoga izraz pod korijenom u jednadžbama za x i y, može se zapisati kao:

$$a^2 \times cos^2\varphi + a^2(1 - e^2) \times sin^2\varphi = a^2 \times cos^2\varphi + (a^2 - a^2e^2) \times sin^2\varphi =$$

$$= a^2 \times cos^2\varphi + a^2 \times sin^2\varphi - a^2e^2 \times sin^2\varphi =$$

$$= a^2 \times (cos^2\varphi + sin^2\varphi - e^2 \times sin^2\varphi) = a^2 \times (1 - e^2 \times sin^2\varphi) \tag{20}$$

Pa jednadžba za koordinate točke na podnevničkoj elipsi kao funkcije širine glase:

$$x = \frac{a^2 \times \cos\varphi}{\sqrt{a^2 \times (1 - e^2 \times sin^2\varphi)}} = \frac{a \times \cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \times sin^2\varphi}}$$

$$y = \frac{b^2 \times \sin\varphi}{\sqrt{a^2 \times (1 - e^2 \times sin^2\varphi)}} = \frac{a^2 \times (1 - e^2) \times \sin\varphi}{a \times \sqrt{1 - e^2 \times sin^2\varphi}} = \frac{a \times (1 - e^2) \times \sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \times sin^2\varphi}} \tag{21}$$

Ovisnost geocentrične i geografske širine:

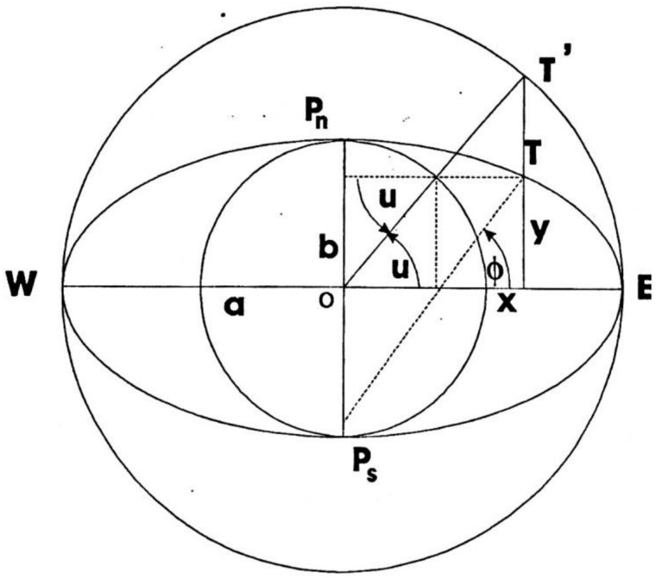
$$\tan\varphi' = (1 - e^2)\tan\varphi \tag{22}$$

e – ekscentricitet Zemljinog elipsoida

Razlika između zemljopisne i geocentrične širine su malih vrijednosti, a najveće su u srednjim zemljopisnim širinama. Na polu i polutniku razlika je nula. Razlika nastaje zbog odstupanja normale (pravca Zemljine sile teže) od radijus vektora elipsoida u nekoj točki.

4.3. REDUCIRANA ŠIRINA

Reducirana širina je kut što ga čini polumjer kružnice koji je jednak većoj osi elipse, koja prolazi točkom T' i kojoj je centar u središtu elipsoida (O). Računa se poput zemljopisne, odnosno geocentrične širine. Položaj točke T određuje se reduciranom širinom i većom osi elipse (a) [6]. Reducirana širina prikazana je na slici 12.



Slika 12. Reducirana širina [6]

Parametarski oblik podnevničke elipse s reduciranom širinom glasi:

$$x = a \times \cos u \qquad y = b \times \sin u \tag{23}$$

Ako se y podijeli s x:

$$\frac{y}{x} = \frac{b \times \sin u}{a \times \cos u} = \frac{b}{a} \tan u$$

$$\tan u = \frac{y}{x} \times \frac{a}{b} \qquad (24)$$

U jednadžbu se uvrštavaju jednadžbe za koordinate točke na podnevničkoj elipsi kao funkcije širine.

$$\tan u = \frac{a \times \sin\varphi \times (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \times sin^2\varphi}} \times \frac{\sqrt{1 - e^2 \times sin^2\varphi}}{a \times \cos\varphi} \times \frac{a}{b} = \tan\varphi \times \frac{a}{b} \times (1 - e^2) \qquad (25)$$

Iz jednadžbe za prvi numerički ekscentricitet elipsoida, jednadžbe (3) dobiva se:

$$a = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} \qquad (26)$$

Ako se jednadžba za parametar a uvrsti u gornju jednadžbu, dobit će se jednadžba za reduciranu širinu koja glasi:

$$\tan u = \tan\varphi \times \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} \times \frac{1}{a \times \sqrt{1 - e^2}} \times (1 - e^2)$$

$$= \tan\varphi \times \frac{a \times \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2}} \times \frac{(1 - e^2)}{a \times \sqrt{1 - e^2}} = \tan\varphi \times \frac{1 - e^2}{\sqrt{1 - e^2}} \; / \times \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$= \tan\varphi \times \frac{(1 - e^2) \times \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2} \qquad (27)$$

Odnos reducirane širine (u) i zemljopisne širine (φ) je:

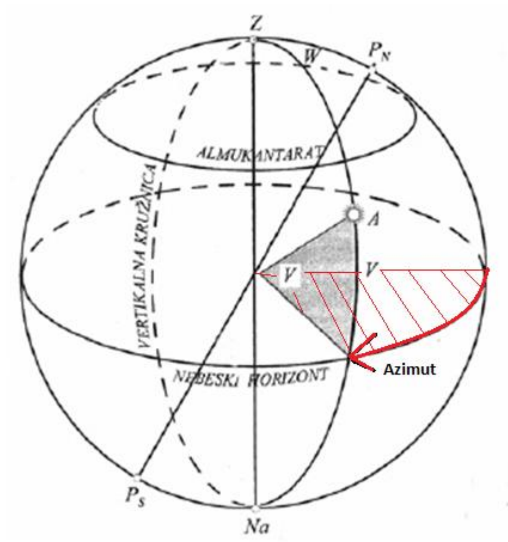
$$\tan u = \tan \varphi \times \sqrt{1 - e^2} \tag{28}$$

5. KOORDINATNI SUSTAVI U ASTRONOMSKOJ NAVIGACIJI

U astronomskoj navigaciji postoje dvije vrste koordinatnih sustava: mjesni koordinatni sustav i nebeski koordinatni sustav. Mjesni koordinatni sustav ovisi o položaju opažača te su to horizontski koordinatni sustav i mjesni koordinatni sustav ekvatora. Nebeski koordinatni sustav ne ovisi o položaju opažača, a tu spadaju koordinatni sustav ekliptike i nebesko ekvatorski koordinatni sustav [3].

5.1. HORIZONTSKI KOORDINATNI SUSTAV

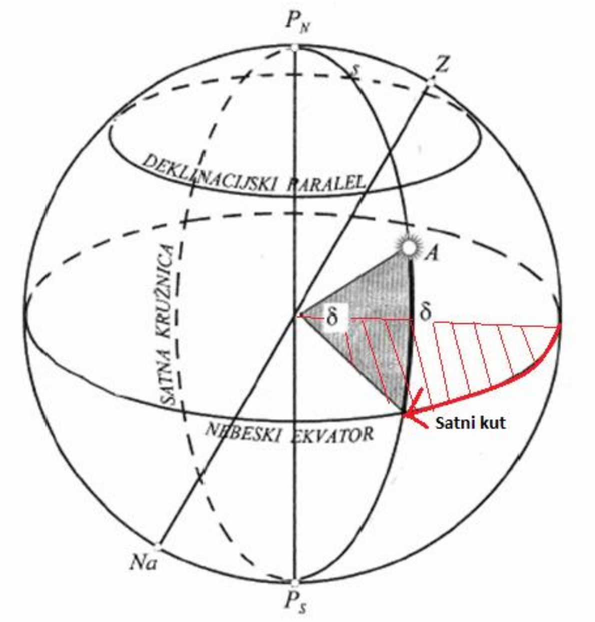
Na slici broj 13 prikazan je horizontski koordinatni sustav. Ishodište horizontskog koordinatnog sustava nalazi se u mjestu u kojem se nalazi promatrač. Polovi ovog koordinatnog sustava su Zenit i Nadir koji se dobiju kada se produži okomica od mjesta na kojem se nalazi promatrač do nebeske sfere. Nebeski horizont, nebeski meridijan i vertikalne kružnice su osnovne kružnice od kojih se sastoji horizontski koordinatni sustav. Nebeski horizont je kružnica koja se dobije kada se horizont opažača produži do nebeske sfere. Položaj nekog objekta izražava se dvjema koordinatama, a to su azimut i visina. Azimut je kut u ravnini horizonta od 0° do 360° mjeren od sjevera do sjecišta vertikalne ravnine u kojoj se nalazi objekt i ravnine horizonta (u smjeru kazaljke na satu). Azimut se može definirati i kao kut u središtu sfere od polupravca iz središta sfere prema pravcu sjevera do pravca iz središta sfere do točke sjecišta vertikale na kojoj se nalazi promatrano nebesko tijelo i ravnine horizonta. Visina je vertikalni kut mjeren od ravnine horizonta do objekta. Može se definirati i kao kut u središtu sfere između ravnine kružnice horizonta i pravca iz središta sfere do promatranog objekta. Od horizonta do zenita kut je 90°. Nebesko tijelo koje se nalazi ispod horizonta ima negativnu visinu. Visinski paralel ili almukantarat je mala kružnica na nebeskoj sferi koja spaja sva nebeska tijela s istim visinama [3].



Slika 13. Horizontski koordinatni sustav [3]

5.2. MJESNI KOORDINATNI SUSTAV EKVATORA

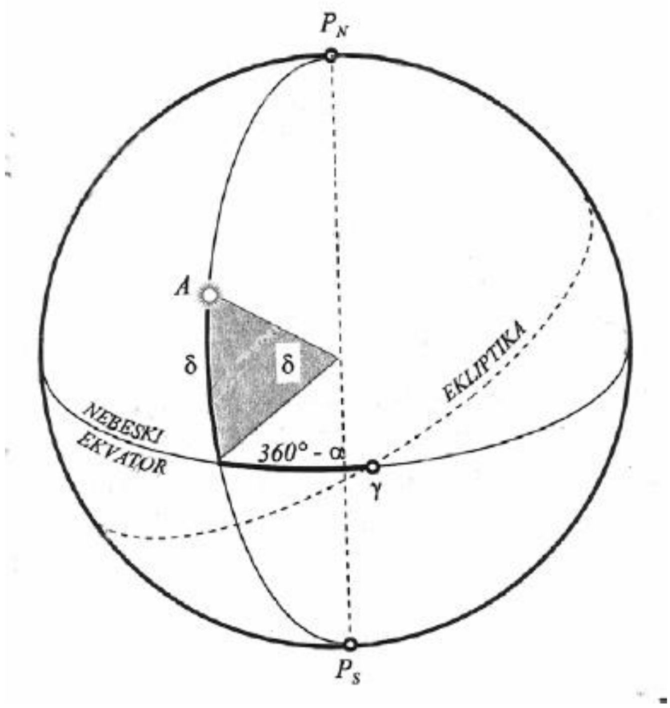
Ravnina nebeskog ekvatora je osnovna ravnina mjesnog koordinatnog sustava ekvatora. Polovi ovog koordinatnog sustava dobiju se ako se os Zemlje produži do nebeske sfere i zovu se sjeverni i južni nebeski pol. Nebeski ekvator je velika kružnica koja se dobije ako se ravnina ekvatora produži do nebeske sfere, a nebeski meridijan je kružnica koja se dobije ako se ravnina meridijana produži do nebeske sfere. Satne kružnice su kružnice koje prolaze polovima i središtima nebeskih tijela. Osnovne koordinate u ovom koordinatnom sustavu su: deklinacija (δ) i mjesni satni kut (s). DEKLINACIJA je luk satne kružnice od nebeskog ekvatora do središta nebeskog tijela ili kut u središtu sfere između ravnine nebeskog ekvatora i pravca iz središta sfere do nebeskog tijela mjereno po luku satne kružnice. Deklinacijski paralel je mala kružnica koja na nebeskoj sferi spaja sva nebeska tijela istih deklinacija. Deklinacija se mjeri od nebeskog ekvatora do pola. Pozitivna je ako je nebesko tijelo sjevernije od ekvatora (oznaka N), a negativna ako je nebesko tijelo južno od ekvatora (oznaka S). Ne može biti veća od 90°. MJESNI SATNI KUT je luk nebeskog ekvatora od gornjeg meridijana do satne kružnice nebeskog tijela, ili odgovrajuću kut u središtu sfere. Satni kut nebeskog tijela broji se u kutnoj mjeri od 0° do 360° preko zapada, ili od 0° do 180° na istok i zapad. Često se broji i u vremenskoj skali od 0 do 24 sata (1h=15°) [3]. Grafički prikaz mjesnog koordinatnog sustava ekvatora prikazan je na slici broj 14.



Slika 14. Mjesni koordinatni sustav ekvatora [3]

5.3. NEBESKO EKVATORSKI KOORDINATNI SUSTAV

Glavne kružnice nebesko ekvatorskog koordinatnog sustava, kojeg se može vidjeti na slici broj 15, su nebeski ekvator i nebeski meridijan (satna kružnica) nebeskog tijela. Ekliptika (kružnica po kojoj se Sunce prividno kreće kroz godinu) služi kao pomoćna kružnica za određivanje proljetne točke. Između ravnine ekliptike i ravnine nebeskog ekvatora je kut i = 23°27′. Dvije su točke u kojima se sijeku ekliptika i nebeski ekvator, a zovu se čvorovi. Proljetna točka (γ) je točka u kojoj Sunce pri svom prividnom gibanju oko Zemlje prelazi s negativne na pozitivnu deklinaciju. Jesenska točka je točka u kojoj Sunce pri svom prividnom gibanju oko Zemlje prelazi s pozitivne na negativnu deklinaciju. U ovom koordinatnom sustavu položaj nekog nebeskog tijela definiran je koordinatama: deklinacija (δ) i surektascenzija (360°-α). Rektascenzija (α) je kut u polu između nebeskih meridijana koji prolaze kroz proljetnu točku i nebesko tijelo, ili luk nebeskog ekvatora od proljetne točke do nebeskog meridijana koji prolazi kroz nebesko tijelo. Broji se od 0° do 360° obrnuto od smjera kazaljke na satu (progresivno). Surektascenzija (360°-α) je kut u polu između nebeskih meridijana koji prolaze kroz proljetnu točku i nebesko tijelo, ili luk nebeskog ekvatora od proljetne točke do meridijana koji prolazi kroz nebesko tijelo. Broji se od 0° do 360° u smjeru kazaljke na satu (retrogradno). Nebesko ekvatorski koordinatni sustav je pogodan za za zvijezde stajaćice jer se ne mijenja zbog Zemljine rotacije i ne ovisi o mjestu opažača [3].

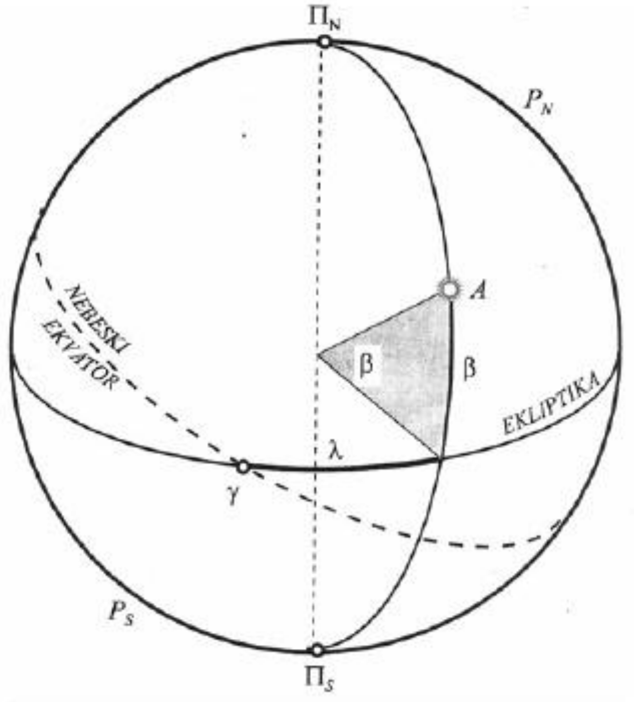


Slika 15. Nebesko ekvatorski koordinatni sustav [3]

5.4. KOORDINATNI SUSTAV EKLIPTIKE

Koordinatni sustav ekliptike, koji je prikazan na slici broj 16, sastoji se od sjevernog i južnog pola ekliptike i osnovnih kružnica: ekliptike i meridijana ekliptike. Sjeverni i južni pol ekliptike dobiju se kada se os koja je okomita na ravninu ekliptike i prolazi središtem Zemlje produži do nebeske sfere. Točke u kojoj ta os siječe nebesku sferu zovu se sjeverni i južni pol ekliptike. Ekliptika je kružnica po kojoj se Sunce prividno kreće tijekom godine, a meridijani ekliptike su kružnice koje spajaju polove ekliptike i središta nebeskih tijela. Neki objekt u koordinatnom sustavu ekliptike određen je koordinatama: latituda ili ekliptična širina (β) i longituda ili ekliptična dužina (λ). Latituda nekog objekta je kut između ravnine ekliptike i pravca prema smjeru promatranog objekta, ili luk meridijana ekliptike od ravnine ekliptike do središta promatranog objekta. Broji se od 0° do 90°.

Latituda je negativna ako se nalazi na južnoj hemisferi (oznaka S), a pozitivna je ako se nalazi na sjevernoj (oznaka N). Longituda nekog promatranog objekta je kut u ekliptičnom polu između ekliptičnih meridijana koji prolaze kroz proljetnu točku i nebesko tijelo, ili luk ekliptike od proljetne točke do ekliptičkog meridijana kroz nebesko tijelo. Broji se od 0° do 360° u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu (progresivno) [3].



Slika 16. Koordinatni sustav ekliptike [3]

6. ZAKLJUČAK

Koordinatni sustav služi za definiranje položaja točke na nekoj plohi ili prostoru te je on kao takav poslužio kao ideja za definiranje zemljopisnih koordinata pomoću kojih će se određivati položaj neke točke na Zemlji. Kako bi zemljopisni koordinatni sustav bio točan i vjerodostojan trebalo ga je prilagoditi Zemljinoj veličini i obliku. Za lakši razvoj zemljopisnog koordinatnog sustava bilo je potrebno predstaviti Zemlju kao kuglu ili Zemlju kao elipsoid. Zemlja kao elipsoid najbliži je prikaz Zemlje, iako je Zemlja nepravilnog oblika, oblika Geoida. Bilo koja točka na Zemljinoj površini određena je dvjema koordinatama: zemljopisna širina i zemljopisna dužina. Zemljopisna širina i zemljopisna dužina su opisane u radu te su zbog lakšeg poimanja također i ilustrirane. Zemljopisni koordinatni sustav omogućio je definiranje položaja bilo koje točke ili objekta na površini Zemlje, a isto tako koordinatni sustavi u astronomiji omogućili su definiranje položaja objekata u svemiru. Kroz rad se također može vidjeti kako su različito definirane koordinate u različitim koordinatnim sustavima. Razlog tome su različita područja upotrebe koordinatnih sustava te različite potrebe korisnika tih sustava. Pravokutni i zemljopisni koordinatni sustavi nisu isti, ali usprkos tome njihov cilj je isti, a to je definiranje neke točke u određenom prostoru.

LITERATURA

[1] Benković, F.; Piškorec, M.;Lako, Lj.; Čepelak, K.; Stajić, D.: *Terestrička i elektronska navigacija*, Hidrografski institut ratne mornarice, Split, 1986.

[2] Lončarić, I.: *Prijelaz iz Gauss – Krugerovih u UTM koordinate putem Helmertove transformacije za područje grada Sarajeva*, Ekscentar br. 12, Zagreb, 2010., str. 74 – 77.

[3] Lušić, Z.: *Astronomska navigacija*, Pomorski fakultet Split, 2012.

[4] Lušić, Z.: *Terestrička navigacija*, Pomorski fakultet Split, 2012.

[5] Simović, A.T.: *Terestrička navigacija*, Školska knjiga, Zagreb, 1998.

[6] Tijardović, I.: *Viša terestrička navigacija*, Split, 1995.

[7] http://www.enciklopedija.hr/ (15.03.2017.)

[8] http://geokov.com/education/latitude-longitude.aspx (17.03.2017.)

[9] http://electron9.phys.utk.edu/vectors/2dcoordinates.htm (17.03.2017.)

[10] http://electron9.phys.utk.edu/vectors/3dcoordinates.htm (09.04.2017.)

[11] http://www.cosmicelk.net/astronomy18c.htm (09.04.2017.)

[12] http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html (15.03.2017.)

[13] http://astrogeo.geoinfo.geof.hr/15e/meridijani_i_duljina.html (17.05.2017.)

[14] http://www.dgt.uns.ac.rs/download/gls_skripta.pdf (17.05.2017.)

POPIS ILUSTRACIJA